Warum Index-Reduktion:

* Numerische Resultate (RKM/BDF)
    - nur für Index-1 / s-frei
    - semi-explizit Index-2

* Konstante Koeffizienten – Ordnungsreduktion bei hohen Indices

*

Wir kennen schon:

s-freie äquivalente Formulierungen

* $\boxed{\text{derivative arrays}}$
* kanonische Form + differentiation ⊕ Elimination
  ($\to$ μ-Index)

+ keine x-transformation
+ nur gegebene Größen werden abgeleitet

Index-Reduktion wie in den Software Paketen
GENDA
GELDA

Numerische Methoden aus Index Reduktion

1. Allgemein basiert auf "Derivative Arrays"
2. Strukturiert – speziell für Mehrkörpersysteme

(1) — Recap: Derivative Arrays (Thm 4.6 im Skript), $E(t)\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t)$

$$M_\mu(t) = \begin{bmatrix} E & & & \\ \dot{E}-A & E & & \\ \ddot{E}-2\dot{A} & 2\dot{E}-A & E & \\ \vdots & & & \ddots \end{bmatrix}, \quad N_\mu(t) = \begin{bmatrix} A & 0 & \cdots & 0 \\ \dot{A} & 0 & & \\ \ddot{A} & 0 & & \\ \vdots & 0 & & \end{bmatrix}, \quad g_\mu(t) = \begin{bmatrix} f \\ \dot{f} \\ \vdots \\ f^{(\mu)} \end{bmatrix}$$

Projektoren

$$Z_{2,3}^H = \begin{bmatrix} Z_2^H \\ Z_3^H \end{bmatrix} M_\mu(t) = 0$$

$$Z_2^H N_\mu(t) = 0$$

$$Z_3^H \begin{bmatrix} A \\ \dot{A} \\ \ddot{A} \\ \vdots \\ A^{(\mu)} \end{bmatrix} =: \hat{A}_2 \quad \text{hat vollen Rang } \boxed{a_\mu}$$

T_2 so, dass $\hat{A}_2 T_2 = 0$, $\operatorname{rank}(E T_2) = \boxed{d_\mu}$

$\boxed{Z_1}$ so, dass $Z_1 E =: \hat{E}_1$ Rang d_μ hat

$(Z_1 A =: \hat{A}_1)$

S-freie Form

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{E}_1(t) \\ 0 \end{bmatrix}}_{\hat{E}(t)} \dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{A}_1 \\ \hat{A}_2 \end{bmatrix}}_{\hat{A}(t)} x + \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{f}_1(t) \\ \hat{f}_2(t) \end{bmatrix}}_{\hat{f}(t)}$$

ist äquivalent + S-frei.

Numerische Realisierung

* ohne Struktur, ist es unmöglich a-priori Z_1, Z_2, T_2 zu berechnen (als Funktion von t)
* deshalb punktweise Berechnung

  z.B. für eine BDF Approximation von $E(t)\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t)$
  bzw $\hat{E}(t)\dot{x}(t) = \hat{A}(t)x(t) + \hat{f}(t)$

$$\rightsquigarrow \quad \hat{E}(t_i)\, D_h x_i = \hat{A}(t_i)x_i + \hat{f}(t_i)$$

$$\hookrightarrow \quad D_h x_i = \frac{1}{h}\sum_{l=0}^{k} \alpha_{k-l}\, x_{i-l} \qquad \left(\text{z.B. } \frac{1}{h}(x_i - x_{i-1})\right)$$

$\rightsquigarrow$ $\hat{E}, \hat{A}$ nur an Punkten t_i benötigt

$\rightsquigarrow$ berechne zur Laufzeit

Pro Zeit (t_i) berechne

(1) $M_\mu(t_i), \; N_\mu(t_i)$

(2) $\tilde{Z}_{2,i} \in \mathbb{R}^{(\mu+1)n, a}$ so, dass

$$\tilde{Z}_{2,i}^H M_\mu(t_i) = 0, \quad \operatorname{rang}\left(\tilde{Z}_{2,i}^H \begin{bmatrix} A \\ \dot{A} \\ \vdots \\ A^{(\mu)} \end{bmatrix}\right) = a$$

(und maximal)

z.B. mit SVD oder QR-Zerlegung

(3) ... $\tilde{T}_{2,i}$, $\hat{Z}_{1,i}$

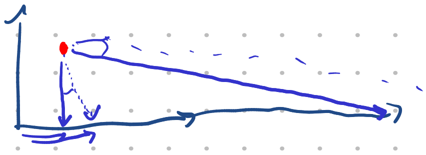
und damit dann

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{Z}_{1,i} E \\ 0 \end{bmatrix}}_{\hat{E}(t_i)} D_h x_i = \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{Z}_{1,i} A \\ \tilde{Z}_{2,i} \begin{bmatrix} A \\ \dot{A} \\ \vdots \\ A^{(\mu)} \end{bmatrix} \end{bmatrix}}_{\hat{A}(t_i)} x_i + \tilde{f}_i$$

Vorteile der punktweisen Berechnung:

* Z_1, Z_2 können orthogonal gewählt werden
  → numerisch vorteilhaft

* man kann erkennen wenn die Ränge sich ändern
  → bemerke, wenn das System sich ändert



* Formulierung in den Original Variablen

Nachteile

* Numerisch aufwändig in jedem Zeitschritt
* Numerische Bestimmung von Rängen ist problematisch

$$\begin{bmatrix} 1 & \\ & 1e^{-14} \end{bmatrix}$$

← Umgehung durch $\boxed{\text{strukturierte Ansätze}}$
* differenzieren nur das nötigste
* benutzen Struktur zur Umformulierung

$\boxed{\text{Beispiel}}$

"Minimal Extension" für Mehrkörpersysteme

$$(\Sigma)\quad \begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = f(x,v) - G_x(x)\lambda \\ 0 = g(x) \end{cases}$$

2D Pendel

$$G_x = \frac{\partial}{\partial x} g$$

addiere Ableitungen

$$\begin{aligned} 0 &= G(x)\dot{x} = G(x)v \\ 0 &= G_x(x)[\dot{x},\dot{x}] + G(x)\dot{v} \end{aligned}$$

Problem das System ist überbestimmt! (bzw. redundant)

Lösung füge Unbekannte hinzu!

„Minimal extension": füge die „richtigen" hinzu

dazu sei $G(x) = [G_1(x) \quad \underbrace{G_2(x)}_{\text{invertierbar}}] \, U$ ↳ orthogonal

z.B. aus QR

mit $U^T = \begin{bmatrix} u_1^T \\ u_2^T \end{bmatrix}$

und sei $U^T v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \quad , U^T x$

$$\to 0 = G(x) v = G(x) U U^T v = [G_1(x) \quad G_2(x)] \begin{bmatrix} v_1 \\ \boxed{v_2} \end{bmatrix}$$

substituiere: $\dot{x}_2 = \tilde{x}_2$, $\dot{v}_2 = \tilde{v}_2$

und formuliere das System in den Variablen

$v_1, v_2, x_1, x_2, \boxed{\tilde{x}_2, \tilde{v}_2}, \lambda$

Thm 6.2 in Kunkel/Mehrmann)

„dieses System ist S-frei".