Semi-explizite Index-2 Probleme

Hairer/Wanner Ch. VII.4

$$\begin{cases} \dot{y} = f(y,z) \\ 0 = g(y) \end{cases}$$

vgl. Index 1: $0 = g(y,z)$

Annahme
- f, g glatte Funktionen
- $g_y(y)\, f_z(y,z)$ invertierbar ← Index-2 Bedingung

Bsp
$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

Index-2 Bed $\Longleftrightarrow$ $A_{21}A_{12}$ inv.

vgl. Navier-Stokes $\quad B M^{-1} B^T$ inv.

So wie für den Index-1 Fall → RKM durch ε-Einbettung erzeugen

$$\dot{y} = f(y,z)$$
$$\varepsilon \dot{z} = 0 = g(y)$$

damit eine RKM gegeben durch

$$\boxed{\begin{array}{l|l} y_{i+1} = y_i + h\sum_{j=1}^{s} b_j \dot{Y}_{ij} & z_{i+1} = z_i + h\sum_{j=1}^{s} b_j \dot{Z}_{ij} \\ \dot{Y}_{ij} = f(Y_{ij}, Z_{ij}) & 0 = g(Y_{ij}) \\ Y_{ij} = y_i + h\sum_{l=1}^{s} a_{jl} \dot{Y}_{il} & Z_{il} = z_i + h\sum_{l=1}^{s} a_{jl} \dot{Z}_{il} \end{array}}$$

Wohlgestelltheit –

Theorem HW, Thm 4.1.1

$$\dot y = f(z,y)$$
$$0 = g(y)$$
$\frac{d}{dt}$ ↓
$$0 = g'(y)\cdot\dot y$$
$$0 = g_y(y)\cdot\dot y$$
$$0 = g_y\cdot f(z,y)$$

Ist

(*)
$$g(y_i) = \mathcal{O}(h^2) \leftarrow \quad h \text{ ist klein}$$
$$g_y(y_i)\,f(y_i,z_i) = \mathcal{O}(h)$$

und gilt, dass $\underbrace{g_y(y_i)\,f_z(y_i,z_i)}_{\text{Index-2}}$ invertierbar ist,

dann hat ein RKM mit $\mathcal{A}$ invertierbar wie oben beschrieben eine lokal eindeutige Lösung. (y_{i+1}, z_{i+1})

Theorem (HW Thm. 4.5)

Wenn $\mathcal{A}$ invertierbar ist und $|1 - b^T\mathcal{A}^{-1}e| < 1$ und local konsistent ist (*), dann konvergiert die RKM Approximation für $\boxed{\{y_n\}}$.

Bemerkung: Durch die Index-2 Bedingung kann Z_{ij} aus der Vorschrift für Y_{ij}, $\dot Y_{ij}$ eliminiert werden.

→ Konvergenz für $\{z_n\}$

Übersicht der RKM Methoden für Index-2 Probleme

Methode	Stufenanzahl	lokale Fehler y	lokale Fehler z	globale Fehler y	globale Fehler z
Gauss	s gerade s ungerade	h^{s+1} h^{2s+1}	h^s	h^{s+1} h^s	h^{s-1} h^{s-2}
⇒ Radau IIA	s	h^{2s}	h^s	h^{2s-1}	h^s

BDF - Verfahren für DAEs

BDF-Verfahren für ODEs:

$$\underbrace{\frac{1}{h}\sum_{\ell=0}^{k} \alpha_{k-\ell} x_{i\ell}}_{\rightsquigarrow\ \dot{x}(t_i)} = f(t_i, x_i)$$

BDF Methods

$\alpha_{k-\ell}$	$\ell=0$	$\ell=1$	$\ell=2$	$\ell=3$
$k=1$	1	-1		
$k=2$	$3/2$	-2	$-1/2$	
$k=3$	$11/6$	-3	$3/2$	$-1/3$

$\rightarrow \frac{1}{h}(1\cdot x_i - 1\cdot x_{i-1}) = \frac{1}{h}(x_i - x_{i-1})$ IE

$\rightarrow \frac{1}{h}\left(\frac{3}{2}x_i - 2x_{i-1} - \frac{1}{2}x_{i-2}\right)$

"bekannt": für ODEs sind BDF-Verfahren konvergent mit Ordnung $p=k$, falls $k \le 6$ ☞

Für DAEs

$$F(t, \boxed{\dot{x}}, x) = 0$$

↓

Approximation durch BDF

Ein Schritt BDF, allgemein:

löse: $F\left(t_i, \frac{1}{h}\sum_{\ell=0}^{k}\alpha_{k-\ell} x_{i-\ell}, x_i\right)$

↓

vgl. IE für

$0 = E\dot{x} - Ax - f$

$0 = E\frac{x_i - x_{i-1}}{h} - Ax_i - f(t_i)$

Thm (KM 5.24) lin. konst. Koeffizienten:

Sei (E, A) regulär mit Index ν.

Dann ist das BDF Verfahren der Ordnung $0 \le k \le 6$ angewendet auf $E\dot{x} = Ax + f(t)$ konvergent mit Ordnung $p = k$.

- Außerdem:
  - BDF konvergent mit Ordnung $\boxed{p = k}$ für $\boxed{\begin{aligned} F_1(t, x, \dot{x}) &= 0 \\ F_2(t, x) &= 0 \end{aligned}}$ } "Index-1" "strangeness-free"

    (Kunkel/Mehrmann 5.27)

    z.B. $\dot{y} = f(y, z)$
    $0 = g(y, z)$

  - für index-2 Probleme $\boxed{\begin{aligned} \dot{y} &= f(y, z) \\ 0 &= g(y) \end{aligned}}$

    Theorem 3.5
    Hairer/Wanner